1. Mecanica do Sistema Solar (II):

Leis de Kepler do movimento planetário

Astronomy: A Beginner's Guide to the Universe, E. Chaisson & S. McMillan (Caps. 0 e 1)
Introductory Astronomy & Astrophysics, M. Zeilek, S. A. Gregory & E. v. P. Smith (Cap.1)
Apostila (astroweb.iag.usp.br/~dalpino/aga215)

Johannes Kepler

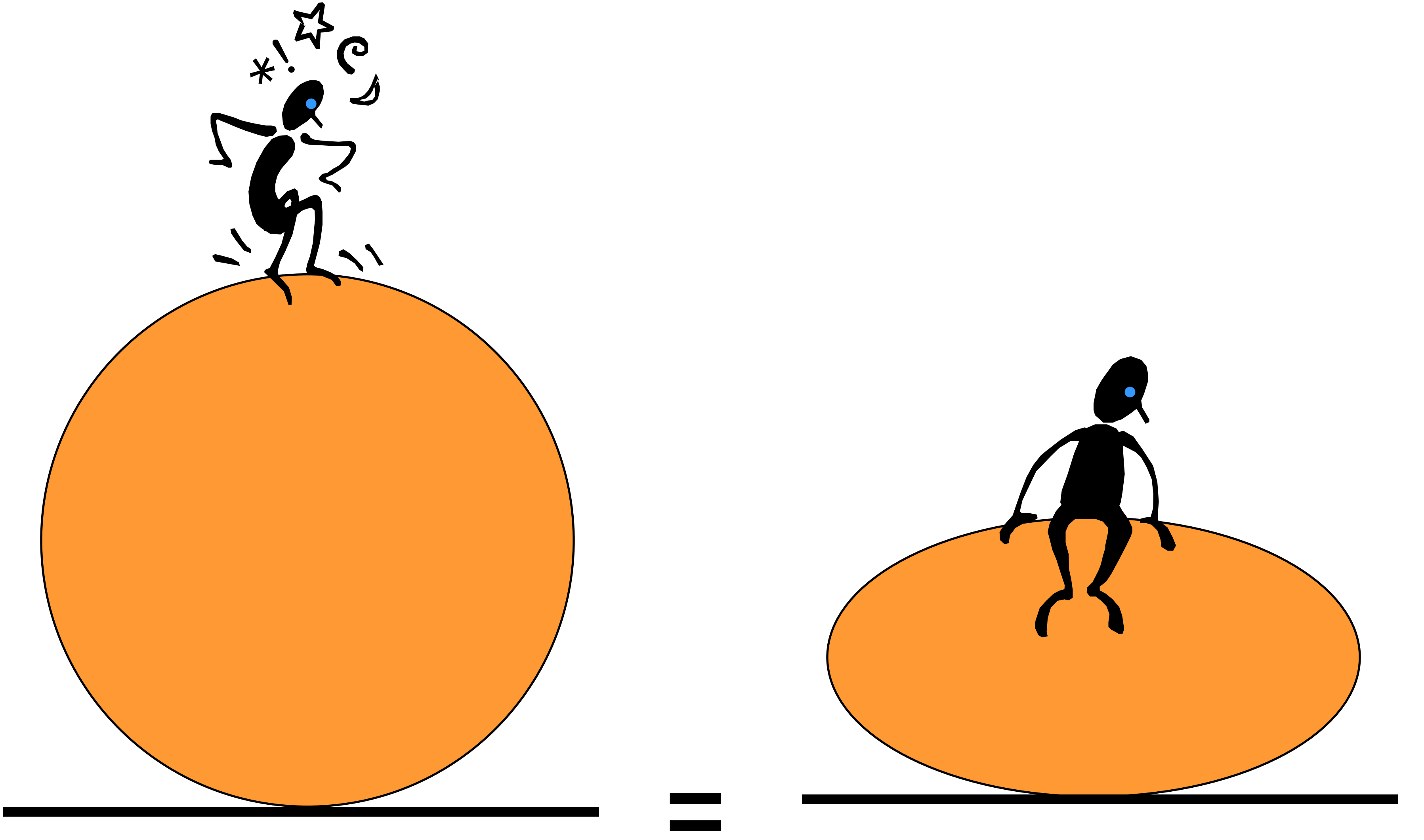
Matemático e Astrônomo Alemão

1571 - 1630

Tycho Brahe

Astrônomo Dinamarquês

1546 - 1601

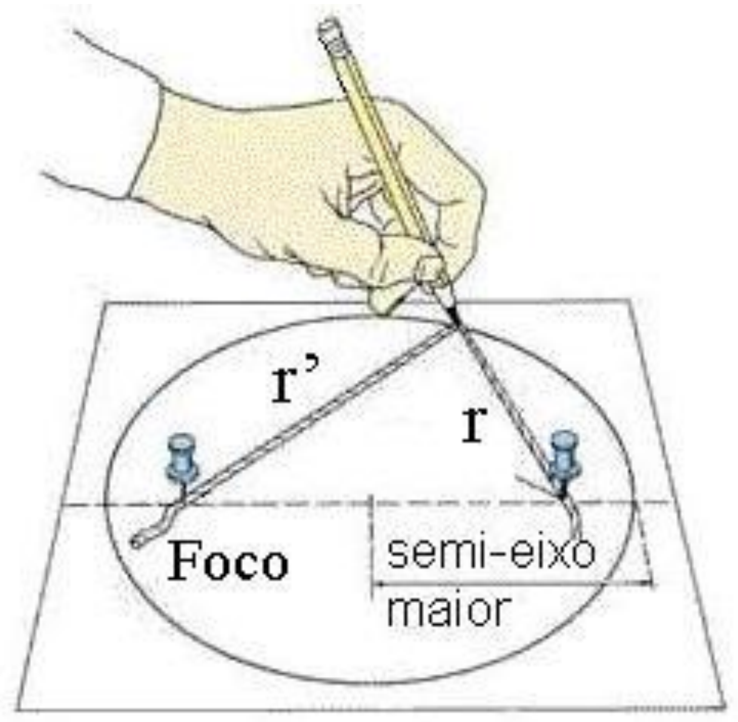


Circunferência achatada = Elipse

Lei das Elipses : sobre órbitas dos planetas

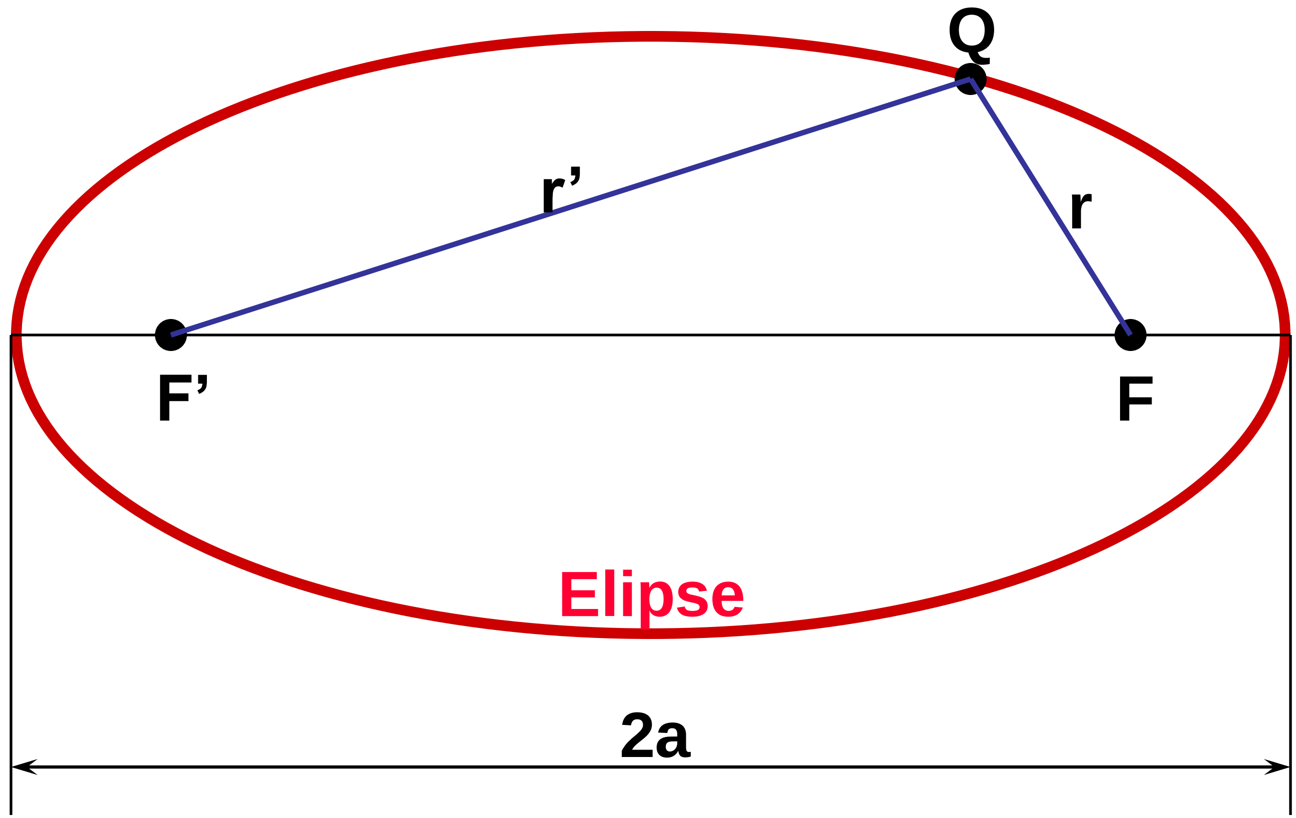
1ª Lei: *A órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol situado em um dos focos.*

Sabemos que na elipse**,** a soma das distâncias até os focos é constante: $r + r' = 2a$, onde a é o semi-eixo maior.



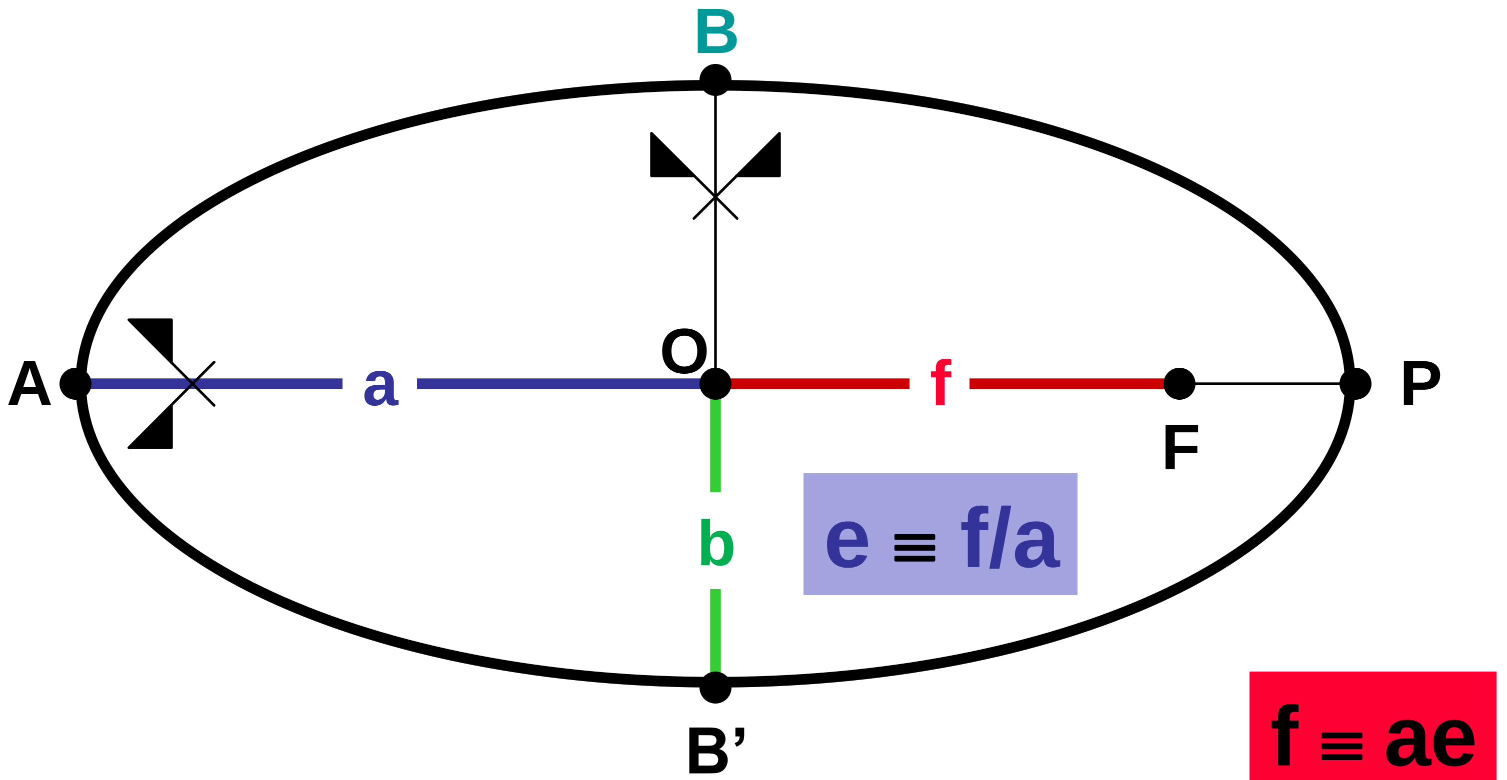
No caso de uma órbita planetária, **o semi-eixo maior da elipse é a distância média do Sol até o planeta**.

Elipse



$$r + r' \equiv 2a$$

Elementos de uma elipse



a = semi-eixo maior

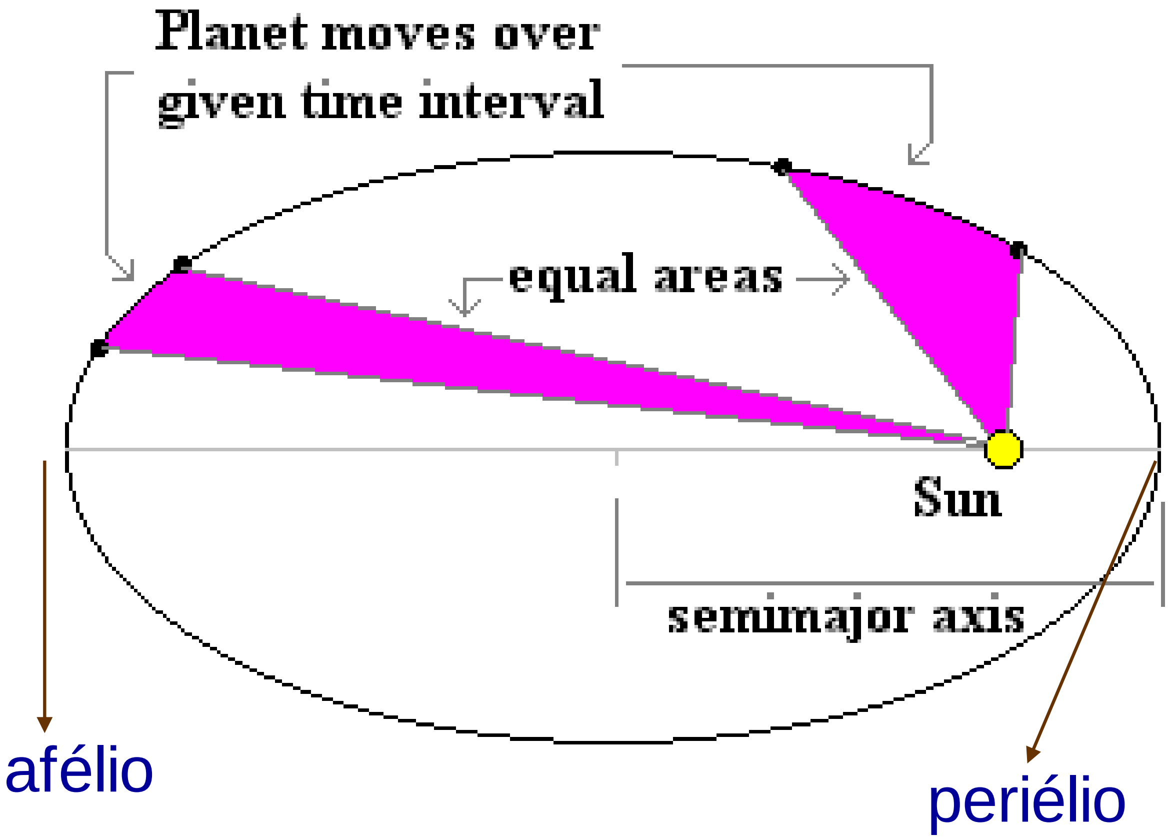
b = semi-eixo menor

f = distância focal

e = excentricidade

Segunda Lei de Kepler: Lei das Áreas

2ª Lei: *O raio vetor que liga o corpo maciço (Sol, por ex.) ao corpo mais leve (um planeta, por ex.) varre áreas iguais em tempos iguais*

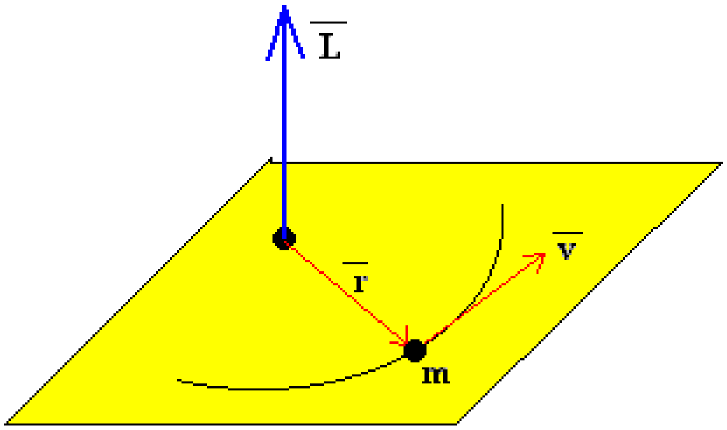


Segunda Lei de Kepler: Lei das Áreas

É uma **consequência da conservação do momento angular.**

Sistema de 2 corpos onde a massa de um dos corpos é muito maior que o outro:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$



L: momento (quantidade de movimento) angular

p: quantidade de movimento linear

r: raio vetor

v: velocidade do corpo mais leve de massa *m*

Lei Harmônica ⇨ Busca de harmonia ⇨ (Kepler a deduziu 10 anos depois)

3ª Lei:

O quadrado do período de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol.

$$P^2 / a^3 = k$$

P é o período sideral do planeta e **a** o semi-eixo maior de sua órbita. A constante **k** tem o mesmo valor para todos os corpos orbitando em torno do Sol.

Tabela : Algumas Propriedades dos Planetas

Planet	*Orbital Semi-Major Axis, a*	*Orbital Period, P*	*Orbital Eccentricity*	P^2/a^3
	(astronomical units)	*(Earth years)*		
Mercury	0.387	0.241	0.206	1.002
Venus	0.723	0.615	0.007	1.001
Earth	1.000	1.000	0.017	1.000
Mars	1.524	1.881	0.093	1.000
Jupiter	5.203	11.86	0.048	0.999
Saturn	9.539	29.46	0.056	1.000
Uranus	19.19	84.01	0.046	0.999
Neptune	30.06	164.8	0.010	1.000
Pluto	39.53	248.6	0.248	1.001

Tabela : Algumas Propriedades dos Planetas

Planet	***Orbital Semi-Major Axis, a***	***Orbital Period, P***	***Orbital Eccentricity***	***P^2/a^3***
	(astronomical units)	***(Earth years)***		
Mercury	0.387	0.241	0.206	1.002
Venus	0.723	0.615	0.007	1.001
Earth	1.000	1.000	0.017	1.000
Mars	1.524	1.881	0.093	1.000
Jupiter	5.203	11.86	0.048	0.999
Saturn	9.539	29.46	0.056	1.000
Uranus	19.19	84.01	0.046	0.999
Neptune	30.06	164.8	0.010	1.000
Pluto	39.53	248.6	0.248	1.001

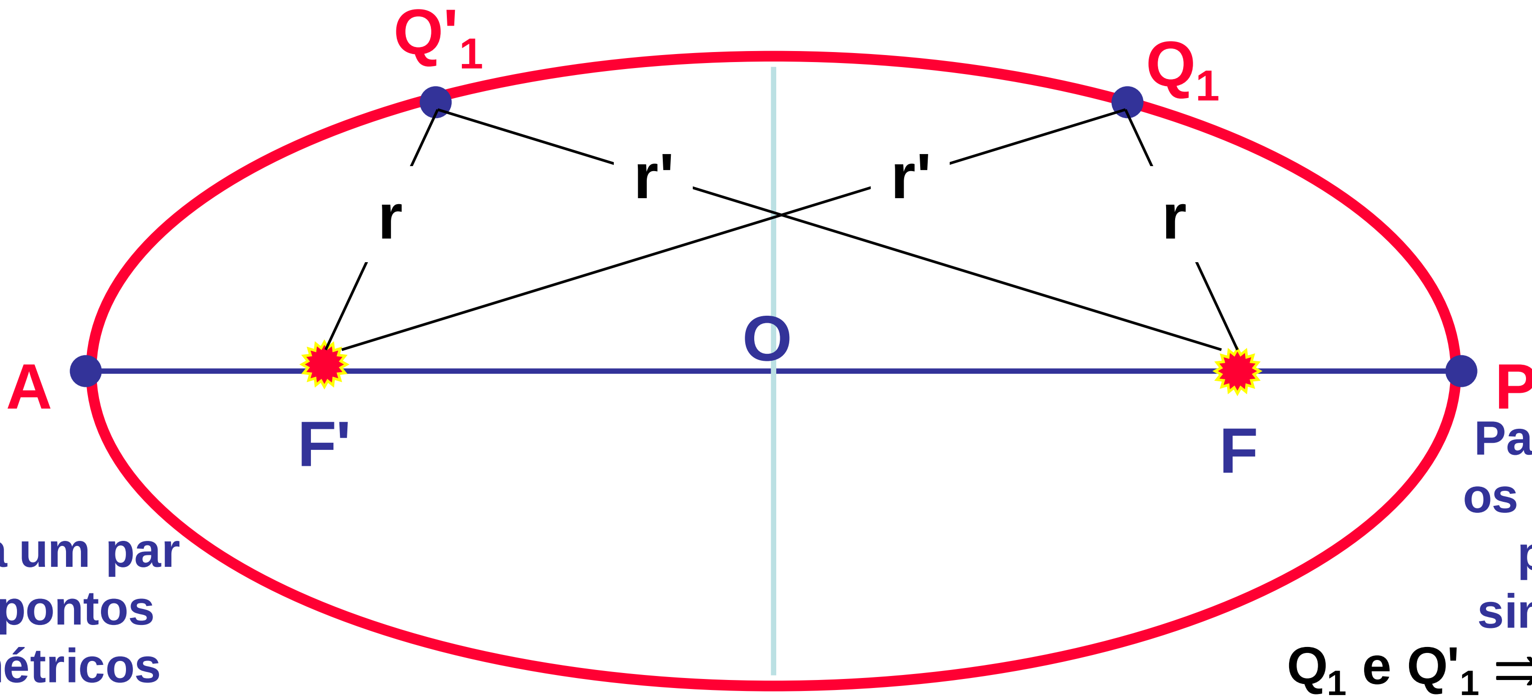
Logo se:

P : em ANOS Terrestres

a : em 1UA = distancia Terra-Sol

➔ **k = 1 !**

Mostrar que a média dos raios orbitais é o semi-eixo maior



Para um par de pontos simétricos

$Q_1 \Rightarrow r + r' = 2a$

$Q'_1 \Rightarrow r' + r = 2a$

$r + r' \quad + \quad r' + r \; = 2a + 2a$

$r + r' + r' + r \; = 4a$

$(r + r' + r' + r) / 4 \; = a$

$r_m \; = a$

Para todos os pares de pontos simétricos

$Q_1 \text{ e } Q'_1 \Rightarrow r_1 \; = a$

$Q_2 \text{ e } Q'_2 \Rightarrow r_2 \; = a$

...

$Q_N \text{ e } Q'_N \Rightarrow r_N \; = a$

$r_1 + r_2 + \ldots + r_N = N.a$

$(r_1 + r_2 + \ldots + r_N) / N = a$

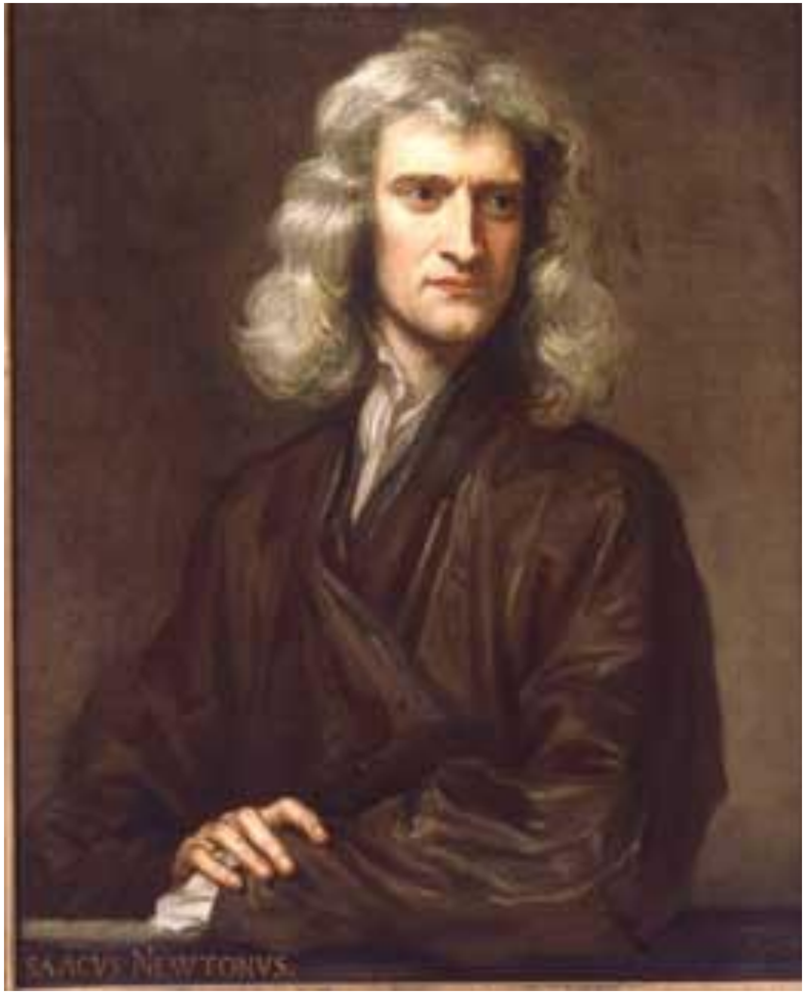
$r_m = a$

A LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

O que impede os planetas de sairem flutuando pelo espaço? Kepler havia atribuído as órbitas elípticas a uma força de atração magnética.

Newton (sec. VII) ⇨ linha de raciocínio semelhante

⇨ lei da gravitação universal, demonstrou-a por meio do movimento da Lua, explicou o movimento dos planetas e generalizou as leis de Kepler

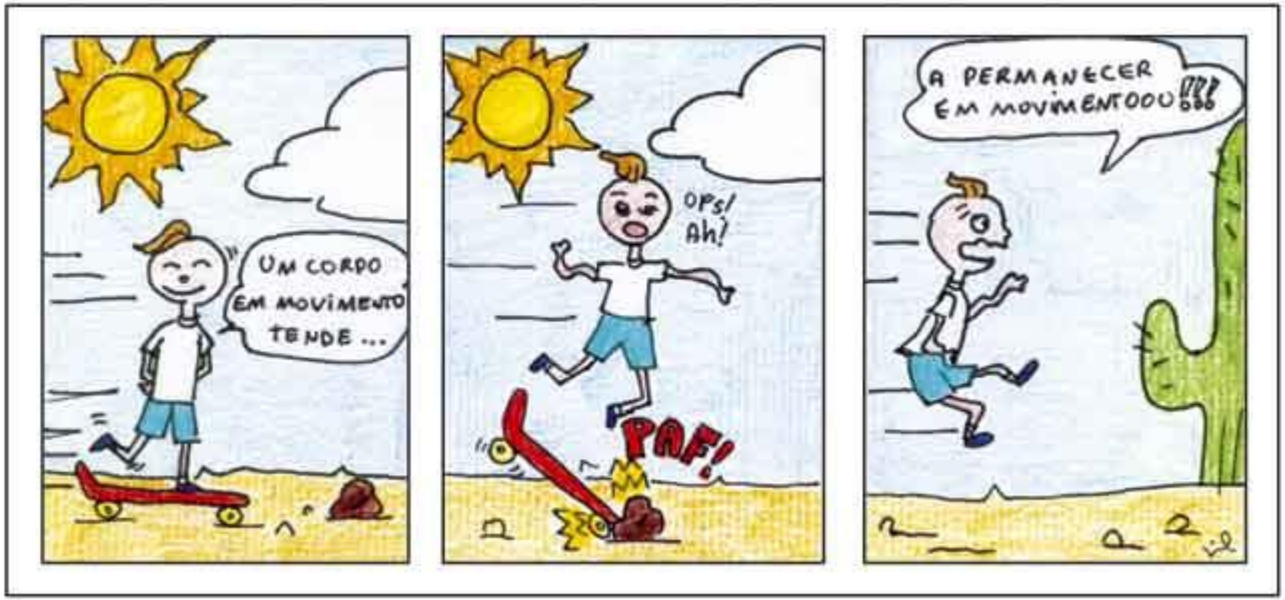


Leis de movimento de Newton

Supõe-se: espaço-tempo absoluto, partícula material de massa **m** descrevendo uma trajetória $\vec{x}(t)$ com velocidade $\vec{v}(t)$, com quantidade de movimento $\vec{p}(t) = m\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}(t)$.

1ª: Lei da inércia

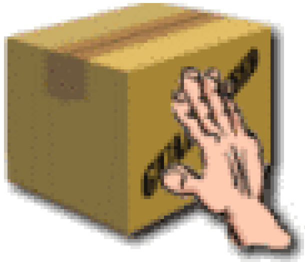
Qualquer corpo permanece em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo e uniforme, a menos que seja compelido a mudar de estado por uma força externa.



2ª: Lei de Newton: da força

A taxa de variação da quantidade de movimento de um corpo é igual à força que atua sobre o corpo.

1. A força da mão acelera a caixa.



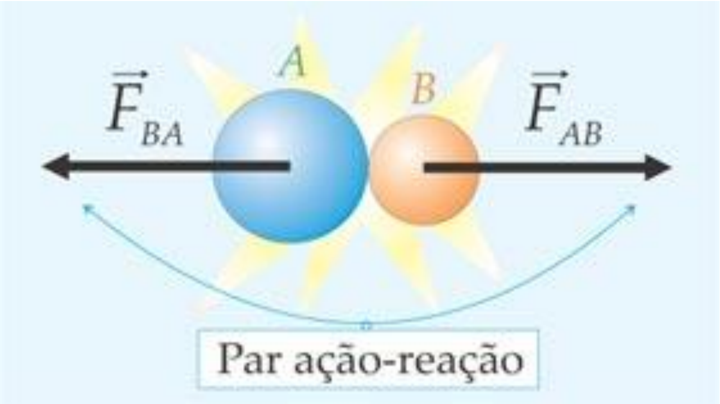
2. Duas vezes a força produz uma aceleração duas vezes maior (**$\vec{a}$ é prop. à força aplicada**)

3. Duas vezes a força sobre uma massa duas vezes maior, produz a mesma aceleração original (**$\vec{a}$ é inversamente prop. a m**)

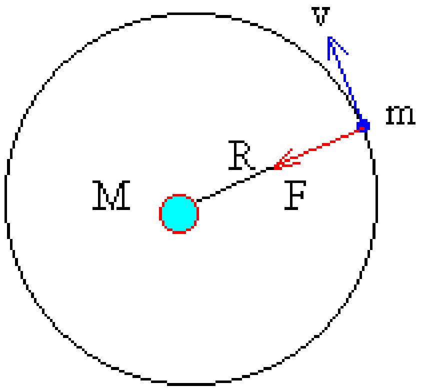
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

3ª: Lei da ação e reação

- A cada ação existe sempre uma reação igual e de sentido contrário.



Para simplificar, vamos supor que o corpo possui órbita circular, de raio **r**:



força centrípeta: $$F_{cent} = \frac{m\,v^2}{r}$$

Se P é o período orbital do corpo: $$v = \frac{2\pi r}{P}$$

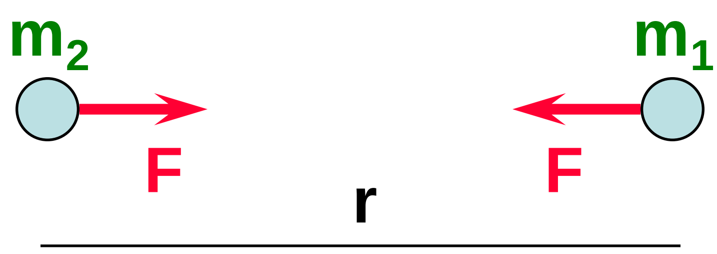
mas, pela terceira lei de Kepler: $P^2 = k r^3$, então:

$$F = m\frac{4\pi^2 r^2}{P^2\,r} = m\frac{4\pi^2 r^2}{k\,r^3\,r} = \frac{4\pi^2 m}{k r^2}$$

Assim, a força que mantém a órbita é inversamente proporcional ao quadrado do raio.

Lei da gravitação Universal

Matéria atrai matéria na razão direta das massas e inversa do quadrado da distância.



m_1, m_2 = massas dos corpos envolvidos
r = distância entre as massas
F = força de atração gravitacional

$$|\vec{F}| = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2}$$

G a constante universal da gravitação $G = 6{,}67\ 10^{-8}\ cm^3\ g^{-1}\ s^{-2}$.

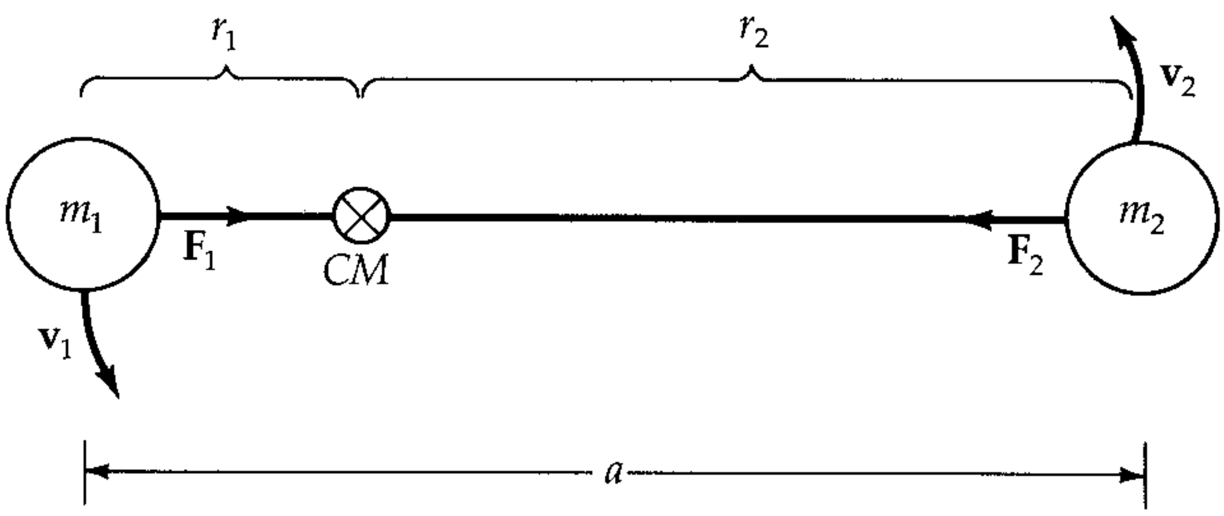
Newton combinou suas três leis do movimento e a lei da gravitação para deduzir as leis empíricas de Kepler.

3ª Lei de Kepler na formulação Newtoniana

Sistema isolado;

dois corpos em órbita circular, sob ação de sua força gravitacional mútua (também se aplica a órbitas elípticas);

massas m_1 e m_2, que orbitam em torno de um centro de massa (CM) suposto estacionário, do qual distam de r_1 e r_2 .



- Uma vez que a

força gravitacional atua ao longo da linha imaginária que os une,

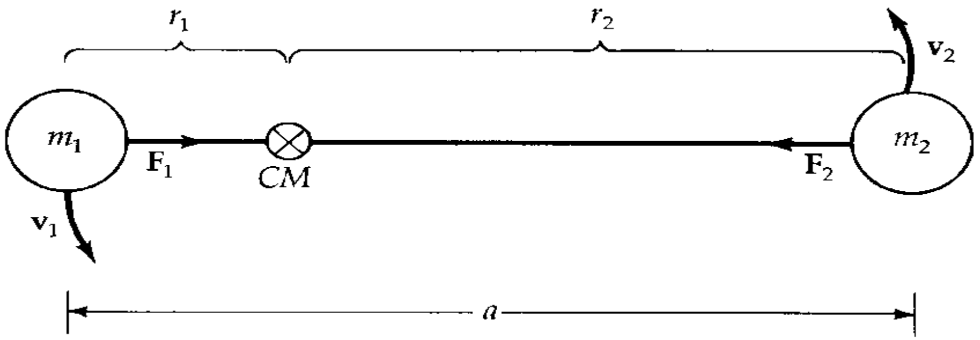
ambos os corpos devem completar uma órbita no mesmo período P (embora se movam com velocidades diferentes).

- Para uma órbita circular: $P = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{P}$.

- A força centrípeta necessária para manter as órbitas é:

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

Lembrando:



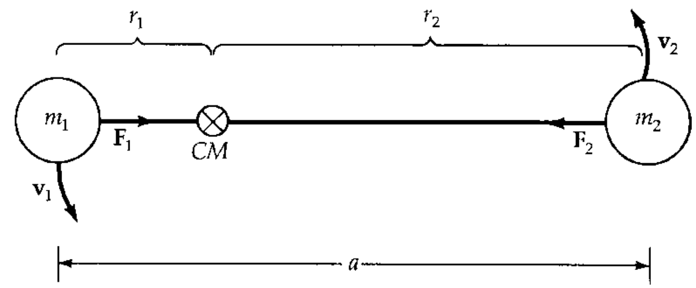
podemos escrever:

$$F_1 = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1^2}{P^2} \frac{m_1}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1 m_1}{P^2} \qquad F_2 = m_2 \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2^2}{P^2} \frac{m_2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2 m_2}{P^2} \quad (1)$$

mas $F_1 = F_2 \Rightarrow r_1 m_1 = r_2 m_2 \Rightarrow \quad \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$

O corpo de massa maior permanece mais próximo do centro de massa.

Como $\quad a = r_1 + r_2$



então $\quad r_1 = (a - r_1)\dfrac{m_2}{m_1} = a\dfrac{m_2}{m_1} - r_1\dfrac{m_2}{m_1}$

$$r_1\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) = a\frac{m_2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad r_1 = a\frac{m_2}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

Lembrando que $\quad F_{grav} = F_1 = F_2 = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F_{grav} = G\dfrac{m_1 m_2}{a^2} \qquad (3)$

Podemos reformular a 3ª lei de Kepler , combinando (1), (2), e (3):

$$F_1 = \frac{4\pi^2\, r_1\, m_1}{P^2} \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2\, r_1\, m_1}{F_1} = \frac{4\pi^2\, a\, m_2\, m_1\, a^2}{(m_1 + m_2)\, G\, m_1\, m_2}$$

$$P^2 = \left[\frac{4\,\pi^2}{G(m_1 + m_2)}\right] a^3$$

k !!

Aplicação ao Sistema Solar

Entre as várias aplicações, podemos calcular, por exemplo, a massa do Sol:

• Se um dos corpos tem massa muito maior que a do outro ($M_\odot \gg m_P$), então,

$$P^2 = \left[\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}\right] a^3 = \frac{4\pi^2}{GM_\Theta} a^3$$

para o sistema Terra-Sol a distância é de 1U.A. e o período é de 1 ano.

$$M_\Theta = \frac{4\pi^2 (1{,}5x10^{13})^3}{(6{,}67x10^{-8})(3{,}16x10^7)^2} \frac{cm^3}{(cm^3 g^{-1} s^{-2})\ (s^2)}$$

então $\mathbf{M_\odot = 1{,}99x10^{33} g}$.

A Força Gravitacional que um objeto exerce em outro é O metodo para determinar-se MASSAS em Astronomia!